ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β’

14 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 152 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου. Δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \varnothing$.

Α3. Θεωρία, σελ. 65 σχολικού βιβλίου. Η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος, προκύπτει από το λόγο $f_i = \dfrac{v_i}{v}$, όπου v_i είναι η συχνότητα της πρατήρησης x_i προς το μέγεθος v του δείγματος. Έτσι, αν πολλαπλασιαστεί επί 100 εκφράζει την ποσοστιαία εμφάνιση της παρατήρησης x_i, σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος ν.

Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $N(A)$, $N(B)$, $N(M)$ τα πλήθη αντίστοιχα των άσπρων (A), κόκκινων (K) και μαύρων (M) σφαιρών. Επειδή $P(M)=\dfrac{1}{4}$, θα είναι: $\dfrac{N(M)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega)=4\bullet N(M)$.

Το πλήθος $N(M)$ όμως είναι φυσικός αριθμός, άρα: $N(\Omega)=\pi o\lambda\, 4=4\kappa,\ \kappa \in \mathrm{N}^*$.
Αφού $64<N(\Omega)<72$ έπεται $64<4\kappa<72 \Leftrightarrow 16<\kappa<18$. Αφού κ φυσικός έπεται $\kappa=17$.
Άρα $N(\Omega)=4\bullet 17=68$.

Β2. Είναι $\mathrm{A}\cup\mathrm{M}\cup\mathrm{K}=\Omega$, άρα $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{M}\cup\mathrm{K})=P(\Omega)=1$ (1), με $A\cap M=\varnothing$, $A\cap K=\varnothing$, $M\cap K=\varnothing$, δηλαδή τα Α, Μ, Κ, είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.
Έτσι η (1) γράφεται $P(A)+P(M)+P(K)=1$.
Προκύπτει έτσι $\dfrac{1}{4}+4\lambda^2-5\lambda+\dfrac{7}{4}=1 \Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

- Για $\lambda=1$ προκύπτει $P(A)=4$, οπότε η τιμή $\lambda=1$ απορρίπτεται διότι $0\le P(A)\le 1$.
- Για $\lambda=\dfrac{1}{4}$ προκύπτει $P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(\mathrm{K})=\dfrac{1}{2}$, $P(\mathrm{M})=\dfrac{1}{4}$. Άρα η τιμή $\lambda=\dfrac{1}{4}$ είναι η ζητούμενη.

Β3. $P(\mathrm{M})=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N(M)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mathrm{N(M)}=\frac{1}{4}\bullet\mathrm{N}(\Omega)=\frac{1}{4}\bullet 68=17.$

Επίσης, $P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mathrm{N(A)}=\frac{1}{4}\bullet\mathrm{N}(\Omega)=\frac{1}{4}\bullet 68=17.$

$P^{'}(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N(K)=\frac{1}{2}N(\Omega)=\frac{1}{2}\bullet 68=34.$

Β4. Έστω Α το ενδεχόμενο να επιλεγεί άσπρη σφαίρα και Μ το ενδεχόμενο να επιλεγεί μαύρη σφαίρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup M$. Επειδή τα Α, Μ είναι ασυμβίβαστα, είναι: $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$\overline{x}=\sum_{i=1}^{7}x_i f_i=8\cdot 0+10\cdot 0{,}1+12\cdot 0{,}2+14\cdot y_\Delta+16\cdot y_E+18\cdot 0{,}1+20\cdot 0$

Επειδή $\overline{x}=14{,}2$ θα έχουμε:

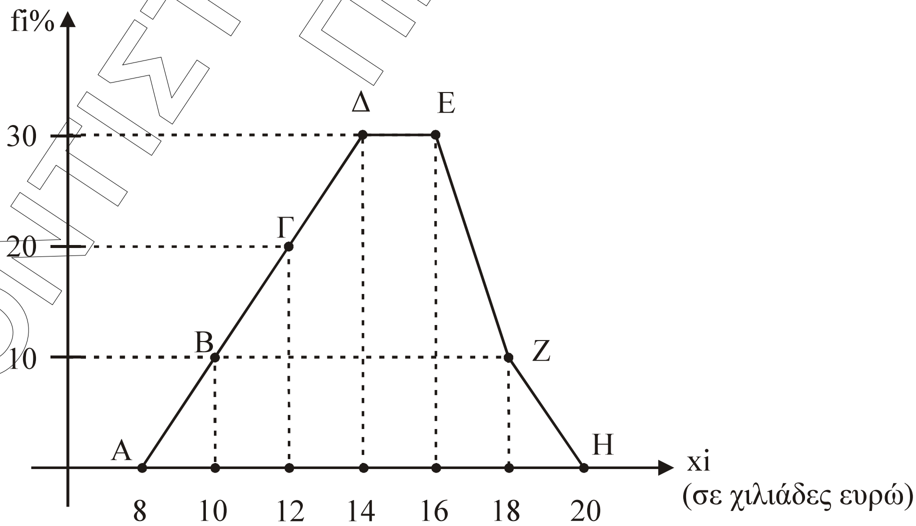
$14{,}2 = 1 + 2{,}4 + 30y_\Delta + 1{,}8 \Leftrightarrow$ (αφού $y_\Delta = y_E$)

$14{,}2 – 5{,}2 = 30\, y_\Delta$

$y_\Delta = \frac{9}{30} = 0{,}3.$

Άρα: $y_\Delta = y_E = 0{,}3$

Γ2. Έχουμε:



Γ3. Είναι:

[-)	x_i	f_i %
9 - 11	10	10
11 - 13	12	20
13 - 15	14	30
15 - 17	16	30
17 - 19	18	10
Σύνολο		100

Γ4. Σύμφωνα με τον πίνακα του ερωτήματος Γ3, το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το επιπλέον εφάπαξ ποσό θα είναι 40%.

Γ5. Ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό, που αναφέρεται στο ερώτημα Γ4, θα είναι:
$80 \bullet 40\% = 32$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left[e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \right]' = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left[\frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{11}{10}x^2 + \frac{2}{5}x \right) \right]' =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left[\frac{1}{3}\left(3x^3 - \frac{11}{5}x + \frac{2}{5}x \right) \right] = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right) = 0 \Leftrightarrow (\text{αφού } e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \neq 0 \;\; \forall x \in R)$$

$$x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2}{5}.$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	-∞		1/3		2/5		+∞
f΄		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$,
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$,

και παρουσιάζει

- τ. μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{3}$
- τ. ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{2}{5}$.

Είναι:

- $\nu_1 = 2 \cdot x_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
- $\nu_2 = 2 \cdot x_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
- $\nu_3 = 2 \cdot x_3 + 2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων:

x_i	v_i	xi vi
$x_1 = 0$	$v_1 = 1$	0
$x_2 = 2$	$v_2 = 5$	10
$x_3 = 3$	$v_3 = 7$	21
	$v = 13$	

Άρα $\bar{x} = \frac{0 + 10 + 21}{13} = \frac{31}{13}$.

Δ2. Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \leq P(B)$, οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Ακόμα, επειδή $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Οπότε:

- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Δ3. **α)** $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})} = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})} \overset{e^x\ 1-1}{\Longleftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) = \frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow 5x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) = 3x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) - 3x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5x}{2} + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2, x_3 = 3.$$