

**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Περικλέους Σταύρου 31
34100 Χαλκίδα
T: 2221-300524 & 6937016375
F: 2221-300524
@: chalkida@diakrotima.gr
W: www.diakrotima.gr

Προς: Μαθητές Α, Β & Γ Λυκείου / Κάθε ενδιαφερόμενο

Αγαπητοί Φίλοι

Όπως σίγουρα γνωρίζετε, από τον Ιούνιο του 2010 ένα νέο «**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**» λειτουργεί και στη Χαλκίδα. Στο Φροντιστήριό μας, κάνοντας χρήση **πρωτοποριακών εκπαιδευτικών μέσων**, το «Σύστημα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ» γίνεται «Σύστημα Επιτυχίας»!

Κάποια από τα βασικά σημεία υπεροχής των Φροντιστηρίων **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** είναι τα εξής:

- **Ευρεία χρήση** διαδραστικού πίνακα
- **Εξειδικευμένοι καθηγητές** επιλεγμένοι με τις πλέον αυστηρές μεθόδους
- **5μελή τμήματα** αντί για τα συνήθη πολυμελή τμήματα των φροντιστηρίων
- **60λεπτο μάθημα** και όχι 45λεπτο
- **Βοηθήματα εκδόσεων ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** που προσφέρονται στους μαθητές μας

Εκτός όλων αυτών των πλεονεκτημάτων, οι μαθητές μας προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις ήδη από την Α Λυκείου, με τον τρόπο που διεξάγονται τα διαγωνίσματά μας. Η διαδικασία ξεκινά με την αποστολή του «Τετραδίου Ύλης» από τα Κεντρικά μία εβδομάδα πριν το καθορισμένο διαγώνισμα, ώστε να γνωρίζουν όλοι (διεύθυνση, καθηγητές και μαθητές) την εξεταστέα ύλη. Στη συνέχεια, την Παρασκευή το βράδυ πριν το διαγώνισμα αποστέλλονται από την Κεντρική Διοίκηση τα θέματα των διαγωνισμάτων του Σαββάτου, τα οποία φυσικά είναι άγνωστα και κοινά για όλα τα φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ.

Φανταστείτε λοιπόν, ότι οι μαθητές μας εξοικειώνονται ήδη από την Α τάξη του Λυκείου με την ιδέα των Πανελληνίων εξετάσεων αφού γράφουν σε όλη την Ελλάδα, κοινά και άγνωστα θέματα, σε κοινή ύλη, κοινή ημέρα και κοινή ώρα!

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Τετράδιο Ύλης του Διαγωνίσματος, τα θέματα του Διαγωνίσματος και οι απαντήσεις από τους εξειδικευμένους καθηγητές μας. Για οποιαδήποτε απορία έχετε μπορείτε να επικοινωνήσετε με το Φροντιστήριο στα τηλέφωνα και το e-mail που υπάρχουν πάνω δεξιά.

Τέλος, θα χαρούμε πολύ να σας δούμε από κοντά, προκειμένου να ενημερωθείτε εσείς και οι γονείς σας για τα προγράμματα σπουδών μας και να ωφεληθείτε από τις προσφορές μας ενόψει της νέας σχολικής χρονιάς.

Με φιλικούς χαιρετισμούς,

Απόστολος Κηρύκος
Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.
MSc Marketing & Communication A.U.E.B.
Διεύθυνση **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** Χαλκίδας

ΔΕΛΤΙΟ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ		ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/03/2011
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ		ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: ΖΑΓΚΛΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	
ΒΙΒΛΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ	ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 2 ΘΕΜΑ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΕΛ. 173:99, ΣΕΛ. 181:138, ΣΕΛ. 196:189 ΣΕΛ. 205:125, ΣΕΛ.207:141, ΣΕΛ. 217:251, ΣΕΛ. 246: 256, ΣΕΛ. 248: 280, ΣΕΛ. 251: 305, ΣΕΛ. 256: 344iii, ΣΕΛ. 268: 368i, ΣΕΛ. 267:366iii		
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 2 ΘΕΜΑ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΕΛ. 221 ΟμΒ: 8ii, ΣΕΛ. 228 ΟμΒ: 2, ΣΕΛ. 241 ΟμΒ: 10, ΣΕΛ. 245 ΟμΒ: 6, ΣΕΛ. 250 ΟμΒ: 2, ΣΕΛ. 256 ΟμΑ: 5, ΣΕΛ. 257 ΟμΒ: 5,8, ΣΕΛ. 269ΟμΒ: 2, ΣΕΛ. 278 ΟμΒ:4 ΣΕΛ. 285 ΟμΒ: 1, 4		

Για την άριστη προετοιμασία ενός διαγωνίσματος απαραίτητη είναι η γνώση όλων των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό και στο φροντιστηριακό βιβλίο ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ στα κεφάλαια που περιλαμβάνονται στην παραπάνω εξεταστέα ύλη. Κατ' ελάχιστον όμως απαραίτητη κρίνεται η γνώση των παραπάνω προτεινόμενων ασκήσεων.

Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α.

A₁. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

ii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) **(Μονάδες 10)**

A₂. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου στο $x_0 \in A$ όπου A το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 5)

A₃. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη **σωστό** (Σ) ή **λάθος** (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

β. Κρίσιμα σημεία του διαγράμματος της f είναι αυτά στα οποία η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν ή δεν παραγωγίζεται η f

γ. Η $\psi = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, όταν $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$

δ. Οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες

ε. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ με $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(1)=e, f(1)=1 \text{ και } f^2(x)e^x = f''(x)f(x) - (f'(x))^2, \forall x \in [0,1]$$

B₁. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - e^x$ είναι σταθερή στο $[0,1]$

(Μονάδες 5)

B₂. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{e^x - e}, x \in [0,1]$

(Μονάδες 5)

B₃. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f στο $[0,1]$

(Μονάδες 4)

B₄. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0,1]$

(Μονάδες 5)

B₅. α) Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει η f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της

β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$2f(x) \geq f(x_1) + f(x_2), x \in \mathbb{R}_+^* \text{ με } x_1 \neq x_2 \neq 1$$

Γ₁) Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

(Μονάδες 5)

Γ₂) Να δείξετε ότι η $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}_+^*$

(Μονάδες 10)

Γ₃) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x f''(x) \ln x = -f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}_+^*$

(Μονάδες 5)

Γ₄) Να βρεθούν τα όρια $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$ και $I_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x^2+x}, x \in \mathbb{R}$

Δ_1) Ν.δ.ο η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$
(Μονάδες 3)

Δ_2) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του C_f στο $(-1, f(-1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_1): y=2011+x$
(Μονάδες 3)

Δ_3) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in (-1,1)$ έτσι ώστε $f''(x_1) + f''(x_2) = 4e^{\frac{3}{4}}$
(Μονάδες 4)

Δ_4) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες σε περιοχή του $+\infty$.
(Μονάδες 7)

Δ_5) α) Να δείξετε ότι $e^{x^2+x} + x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Επιμέλεια Θεμάτων

Κ. ΖΑΓΚΛΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Θεωρία-απόδειξη, σχολικού σελ. 262.

A₂. Θεωρία-ορισμός, σχολικού σελ. 258.

A₃. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B₁. Αρκεί να δείσουμε ότι $g'(x)=0$, για κάθε $x \in (0,1)$

Η g είναι παραγωγισιμή (ως διαφορά των παραγωγισιμών συναρτήσεων $\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot e^x$) με $g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - e^x \right)' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} - e^x$. Από υπόθεση όμως

$$f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = f^2(x) \cdot e^x \text{ οπότε } g'(x) = \frac{f^2(x) \cdot e^x}{f^2(x)} - e^x = e^x - e^x = 0$$

Δηλαδή η g είναι σταθερή στο $[0,1]$ οπότε $g(x)=c$, $x \in [0,1]$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } g(1)=c \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{f(1)} - e = c \Leftrightarrow \frac{e}{1} - e = c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα $g(x)=0$, $x \in [0,1]$.

B₂. Από ερώτημα (B₁) για κάθε $x \in [0,1]$, $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - e^x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow (\ln |f(x)|)' = (e^x)' \text{ άρα } \ln |f(x)| = e^x + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = e^{e^x + c_1} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Για } x=1 \text{ η } \textcircled{1} \Rightarrow |f(1)| = e^{e+c_1} \Leftrightarrow 1 = e^{e+c_1} \Leftrightarrow \ln 1 = \ln e^{e+c_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = e + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -e$$

$$\text{Οπότε } |f(x)| = e^{e^x - e}, \quad x \in [0,1]$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως 2 φορές παραγωγισιμή) και επειδή $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως $f(1) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$ οπότε $f(x) = e^{e^x - e}$, $x \in [0,1]$

B₃. $f'(x) = (e^{e^x - e})' = (e^{e^x - e}) \cdot (e^x - e)' = e^x (e^{e^x - e}) > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

$$\begin{aligned} \text{B}_4. f''(x) &= (e^x (e^{e^x - e}))' = e^x (e^{e^x - e}) + e^x \cdot (e^{e^x - e})' = e^x (e^{e^x - e}) + e^x (e^{e^x - e}) (e^x - e)' \\ &= e^x (e^{e^x - e}) + e^{2x} (e^{e^x - e}) = (e^{e^x - e}) (e^x + e^{2x}) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1) \end{aligned}$$

Δηλαδή η f είναι κυρτή στο $[0,1]$.

B₅ α) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ άρα είναι 1-1 συνεπώς υπάρχει η f^{-1} . Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow e^{e^x - e} = y \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln e^{e^x - e} = \ln y \\ y > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x - e = \ln y \\ y > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln e^x = \ln(\ln y + e) \\ y > 0, y > \frac{1}{e^e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \ln(\ln y + e) \\ y > \frac{1}{e^e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln(\ln y + e), y > \frac{1}{e^e} \cdot \text{ Άρα } f^{-1}(x) = \ln(\ln x + e), x \in \left(\frac{1}{e^e}, +\infty \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x + e) \xrightarrow[u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty]{u = \ln x + e} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ $2f(x) \geq f(x_1) + f(x_2)$ οπότε για $x = x_1$ και $x = x_2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{έχουμε } 2f(x_1) \geq f(x_1) + f(x_2) \\ 2f(x_2) \geq f(x_1) + f(x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_2) \geq f(x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

αλλά $x_1 \neq x_2$ οπότε η f δεν είναι 1-1.

Γ₂. Από το ερώτημα (Γ₁) έχουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ οπότε από την αρχική

$$\text{υπόθεση για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ ισχύει } \left. \begin{array}{l} 2f(x) \geq 2f(x_1) \\ \text{και} \\ 2f(x) \geq 2f(x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \geq f(x_1) \\ \text{και} \\ f(x) \geq f(x_2) \end{array} \right\}$$

Δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα x_1, x_2 και επειδή είναι παραγωγισιμη σε αυτά από Θ. Fermat έχουμε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Για την συνάρτηση f' έχουμε:

① f' συνεχής στο $[x_1, x_2]$ (ως 2 φορές παραγωγισιμη)

② f' παραγωγισιμη στο (x_1, x_2)

③ $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Οπότε από Θ. Bolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (0, +\infty)$

ώστε $f''(x_0) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$

Γ₃. Η εξίσωση $x \cdot f''(x) \cdot \ln x = -f'(x)$ είναι ισοδύναμη με την

$$x \cdot f''(x) \cdot \ln x + f'(x) = 0 \xrightarrow{x > 0} f''(x) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x) \cdot \ln x + f'(x) \cdot (\ln x)' = 0 \Leftrightarrow (f'(x) \cdot \ln x)' = 0$$

Θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) \cdot \ln x, x > 0$, και έστω $x_1 < 1 < x_2$

Για την g έχουμε ότι:

① Η g είναι συνεχής στα $[x_1, 1], [1, x_2]$

② Η g είναι παραγωγισιμη στα $(x_1, 1), (1, x_2)$ με $g'(x) = f''(x) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot f'(x)$

$$\textcircled{3} \left. \begin{array}{l} g(x_1) = f'(x_1) \cdot \ln x_1 = 0 \\ g(1) = f'(1) \cdot \ln 1 = 0 \\ g(x_2) = f'(x_2) \cdot \ln x_2 = 0 \end{array} \right\} g(x_1) = g(1) = g(x_2) = 0$$

Οπότε από Θ. Bolle υπάρχουν $p_1 \in (x_1, 1)$ και $p_2 \in (1, x_2)$ δηλαδή

$p_1 \neq p_2 \in (0, +\infty)$ ώστε $g'(p_1) = g'(p_2) = 0$. Δηλαδή έχει δύο τουλάχιστον

ρίζες στο $(0, +\infty)$ η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
 $f''(x) \cdot \ln x = -f'(x).$

$$\Gamma_4. \quad I_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τη συνάρτηση f έχουμε:

- ① Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ (ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)
- ② Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ με $f'(x) = (e^{x^2+x})' = e^{x^2+x} \cdot (x^2+x)' = (2x+1) \cdot e^{x^2+x}$
- ③ $f(-1) = e^{1-1} = e^0 = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} f(-1) = f(0) \\ f(0) = e^{0-0} = e^0 = 1 \end{array} \right.$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$.

Δ2. Αρκεί να δείσουμε ότι $\lambda \cdot \lambda_1 = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = f'(-1) = e^{(-1)^2-1} \cdot (2(-1)+1) = e^0 \cdot (-2+1) = -1 \\ \lambda_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \cdot \lambda_1 = (-1) \cdot 1 = -1 \text{ δηλαδή η}$$

εφαπτομένη της C_f στο $(-1, f(-1))$ είναι κάθετη στην ευθεία e_1 .

Δ3. Για τη συνάρτηση f' έχουμε:

- ① Η f' είναι συνεχής στα $[-\frac{1}{2}, 0], [0, \frac{1}{2}]$
- ② Η f' είναι παραγωγίσιμη στα $(-\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ με $f''(x) = [(2x+1) \cdot e^{x^2+x}]' = (2x+1)' \cdot e^{x^2+x} + (2x+1) \cdot (e^{x^2+x})' = 2 \cdot e^{x^2+x} + (2x+1)^2 \cdot e^{x^2+x} = e^{x^2+x} \cdot [2 + (2x+1)^2]$

Οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$ και ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, \frac{1}{2})$ δηλαδή δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ ώστε

$$\left. \begin{array}{l} f''(x_1) = \frac{f'(0) - f'(-\frac{1}{2})}{0 + \frac{1}{2}} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} = 2 \\ f''(x_2) = \frac{f'(\frac{1}{2}) - f'(0)}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{2e^{3/4} - 1}{\frac{1}{2}} = 4e^{3/4} - 2 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f''(x_1) + f''(x_2) = 2 + 4e^{3/4} - 2 = 4e^{3/4}$$

Δ5α) Η εφαπτομένη ε της C_f στο $(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x$

Επειδή $f''(x) = e^{x^2+x} \cdot [2 + (2x+1)^2] > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την ε (με εξαίρεση ίσως το σημείο επαφής), δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq -x \Leftrightarrow e^{x^2+x} \geq -x \Leftrightarrow e^{x^2+x} + x \geq 0$.

β) Έστω $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$. Έχουμε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\swarrow$	$\nearrow$	

$f(0)$ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Έχουμε $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ δηλαδή η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ δηλαδή η g είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$ άρα και για $x = x^2 + x$
 $e^{x^2+x} \geq (x^2+x) + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Δ4. Προφανώς επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Εξετάσουμε αν η C_f έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x^2+x})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x+1) \cdot e^{x^2+x}] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Δ. ΑΚΙΝΟΣΟΓΛΟΥ