

**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Περικλέους Σταύρου 31
34100 Χαλκίδα
Τ: 2221-300524 & 6937016375
F: 2221-300524
@: chalkida@diakrotima.gr
W: www.diakrotima.gr

Προς: Μαθητές Α, Β & Γ Λυκείου / Κάθε ενδιαφερόμενο

Αγαπητοί Φίλοι

Όπως σίγουρα γνωρίζετε, από τον Ιούνιο του 2010 ένα νέο «**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**» λειτουργεί και στη Χαλκίδα. Στο Φροντιστήριό μας, κάνοντας χρήση **πρωτοποριακών εκπαιδευτικών μέσων**, το «Σύστημα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ» γίνεται «Σύστημα Επιτυχίας»!

Κάποια από τα βασικά σημεία υπεροχής των Φροντιστηρίων **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** είναι τα εξής:

- **Ευρεία χρήση** διαδραστικού πίνακα
- **Εξειδικευμένοι καθηγητές** επιλεγμένοι με τις πλέον αυστηρές μεθόδους
- **5μελή τμήματα** αντί για τα συνήθη πολυμελή τμήματα των φροντιστηρίων
- **60λεπτο μάθημα** και όχι 45λεπτο
- **Βοηθήματα εκδόσεων ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** που προσφέρονται στους μαθητές μας

Εκτός όλων αυτών των πλεονεκτημάτων, οι μαθητές μας προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις ήδη από την Α Λυκείου, με τον τρόπο που διεξάγονται τα διαγωνίσματά μας. Η διαδικασία ξεκινά με την αποστολή του «Τετραδίου Ύλης» από τα Κεντρικά μία εβδομάδα πριν το καθορισμένο διαγώνισμα, ώστε να γνωρίζουν όλοι (διεύθυνση, καθηγητές και μαθητές) την εξεταστέα ύλη. Στη συνέχεια, την Παρασκευή το βράδυ πριν το διαγώνισμα αποστέλλονται από την Κεντρική Διοίκηση τα θέματα των διαγωνισμάτων του Σαββάτου, τα οποία φυσικά είναι άγνωστα και κοινά για όλα τα φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ.

Φανταστείτε λοιπόν, ότι οι μαθητές μας εξοικειώνονται ήδη από την Α τάξη του Λυκείου με την ιδέα των Πανελληνίων εξετάσεων αφού γράφουν σε όλη την Ελλάδα, κοινά και άγνωστα θέματα, σε κοινή ύλη, κοινή ημέρα και κοινή ώρα!

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Τετράδιο Ύλης του Διαγωνίσματος, τα θέματα του Διαγωνίσματος και οι απαντήσεις από τους εξειδικευμένους καθηγητές μας. Για οποιαδήποτε απορία έχετε μπορείτε να επικοινωνήσετε με το Φροντιστήριο στα τηλέφωνα και το e-mail που υπάρχουν πάνω δεξιά.

Τέλος, θα χαρούμε πολύ να σας δούμε από κοντά, προκειμένου να ενημερωθείτε εσείς και οι γονείς σας για τα προγράμματα σπουδών μας και να ωφεληθείτε από τις προσφορές μας ενόψει της νέας σχολικής χρονιάς.

Με φιλικούς χαιρετισμούς,

Απόστολος Κηρύκος
Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.
MSc Marketing & Communication A.U.E.B.
Διεύθυνση **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** Χαλκίδας

ΔΕΛΤΙΟ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

ΤΑΞΗ: Γ ΛΥΚΕΙΟΥ		ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: 09/10/2010
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ-ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ)	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: ΖΑΓΚΛΗΣ ΚΩΣΤΑΣ		
ΒΙΒΛΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ			
ΒΙΒΛΙΟ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ §2.1 – και 2.3§ ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΕΛ. 96: ΟμΑ: 12, 14 ΟμΒ: 2, 3, 4, 5β, 7, 8β, 9 ΣΕΛ. 101: ΟμΑ: 4, 5, 7, 8, 9 ΟμΒ: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10		

Για την άριστη προετοιμασία ενός διαγωνίσματος απαραίτητη είναι η γνώση όλων των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό και στο φροντιστηριακό βιβλίο ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ στα κεφάλαια που περιλαμβάνονται στην παραπάνω εξεταστέα ύλη. Κατ' ελάχιστον όμως απαραίτητη κρίνεται η γνώση των παραπάνω προτεινόμενων ασκήσεων.

Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α.

A₁. Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Μονάδες 4

A₂. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 8

A₃. Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού z

Μονάδες 3

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διάταξη και οι ιδιότητες της μεταφέρονται από το R στο C

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους

γ) Η εξίσωση $az^2 + \beta z + \gamma = 0, \alpha, \beta, \gamma \in R, a \neq 0$ με $\Delta < 0$ δίνει ρίζες

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

δ) $(\overline{z})^v = \overline{(z^v)}$

ε) $z^{-v} = \frac{1}{z^v}, z \in C, v \in N^*$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η εξίσωση : $z^2 + 2z + 4 = 0$ (1)

B₁. Υπολογίστε την παράσταση $A = \frac{z_1 + z_2 + 4}{z_1 z_2 - 2}$ με z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης (1), χωρίς να τη λύσετε.

Μονάδες 5

B₂. Να αποδείξετε ότι ο $w = z_1^v + z_2^v, v \in \mathbb{N}$ με z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης (1) είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

B₃. Να αποδείξετε ότι ο $u = (x + yi)^{2012} - (y + xi)^{2012}$ είναι φανταστικός αριθμός.

Μονάδες 6

B₄. Υπολογίστε τις παραστάσεις : ι) $B = z^3$ ιι) $\Gamma = \frac{z^9}{(1-i)^8}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ.

Εστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο ώστε $z_1 + z_2 + z_3 = 0, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$\Gamma_1. z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2z_1 z_2 = 0$

Μονάδες 5

$\Gamma_2. z_1 z_2 z_3 = z_3^3$

Μονάδες 6

$\Gamma_3. |z_1| = |z_2| = |z_3|$

Μονάδες 5

$\Gamma_4.$ Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται οι μιγαδικοί $w_1 = 5i^{2010} - 10i^3$, $w_2 = 3 + 4i$ και ο z που ικανοποιεί τη σχέση $z + 1 = -\frac{1}{z}$, $z \neq 0$

Δ_1 . Να γράψετε το μιγαδικό $\frac{w_1}{w_2}$ στην κανονική του μορφή και να υπολογίσετε τον z^3

Μονάδες 6

Δ_2 . Αν η εξίσωση $x^2 - (a - \beta)x + 6a + \beta = 0$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον $\frac{w_1}{w_2}$ να βρείτε τα α, β .

Μονάδες 8

Δ_3 . Να υπολογίσετε την παράσταση $A = z^{1453} + z^{1940} + z^{2010}$

Μονάδες 5

Δ_4 . Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στην Δ_2 να λύσετε την εξίσωση:
 $az - 3\beta\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Επιμέλεια θεμάτων:

Παпасίκας Ιωάννης

ΘΕΜΑ Α

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Θεωρία - απόδειξη σχολικού σελ. 91

Α2. Θεωρία - απόδειξη σχολικού σελ. 98

Α3. Θεωρία - ορισμός σχολικού σελ. 97

Α4. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $z_1 + z_2 = \frac{-6}{a} = -2$, $z_1 \cdot z_2 = \frac{8}{a} = 4$ οπότε $A = \frac{-2+4}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$.

Β2. Αρκεί να δείψουμε ότι $\bar{w} = w$. Πράγματι $\bar{w} = \overline{z_1^v + z_2^v} = \overline{z_1^v} + \overline{z_2^v} = (\bar{z}_1)^v + (\bar{z}_2)^v$
Επειδή για την εξίσωση (1) $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 < 0$ z_1, z_2 συζυγείς ρίζες
άρα $\bar{z}_1 = z_2$ και $\bar{z}_2 = z_1$ (II). Οπότε (I) $\Rightarrow \bar{w} = z_2^v + z_1^v = w$ άρα w πραγματικός.

Β3. $u = (x+yi)^{2012} - (y+xi)^{2012} = (x+yi)^{2012} - (-i^2 y+xi)^{2012} = (x+yi)^{2012} - [(x-yi)i]^{2012}$
 $= (x+yi)^{2012} - (x-yi)^{2012} \cdot i^{2012} = (x+yi)^{2012} - (x-yi)^{2012}$ (III)

Αν $w = x+yi$ τότε $\bar{w} = x-yi$ οπότε η (III) γίνεται:

$u = w^{2012} - (\bar{w})^{2012} = w^{2012} - \overline{w^{2012}} = 2i \operatorname{Im}(w^{2012})$ άρα u φανταστικός.

Β4. i) Από την αρχική εξίσωση έχουμε $z^2 = -2z - 4$ οπότε:

$B = z^3 = z^2 \cdot z = (-2z - 4) \cdot z = -2z^2 - 4z = -2(-2z - 4) - 4z = 4z + 8 - 4z = 8$

ii) $z^3 = (z^2)^3 = 8^3 = 512$ και $(1-i)^8 = [(1-i)^2]^4 = (1-2i+i^2)^4 = (1-2i-1)^4 = (-2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 2^4 \cdot 1 = 16$ οπότε:

$\Gamma = \frac{512}{16} = 32$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -z_3 \Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = z_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 \cdot z_2 = z_3^2 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2z_1 \cdot z_2 = 0$

Γ2. Από το ερώτημα (Γ1) έχουμε $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 2z_1 \cdot z_2 = 0 \xrightarrow{z_1^2 + z_2^2 = -z_3^2}$
 $\Rightarrow -z_3^2 - z_3^2 + 2z_1 \cdot z_2 = 0 \Rightarrow 2z_1 \cdot z_2 = 2z_3^2 \xrightarrow{\text{υποθ.}} z_1 \cdot z_2 = z_3^2$
 $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = z_3^3$

Γ3. Λόγω του ερωτήματος (Γ2) έχουμε $z_1^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$, $z_2^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$, $z_3^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
οπότε $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 \Rightarrow |z_1^3| = |z_2^3| = |z_3^3| \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 = |z_3|^3$ δηλαδή $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

Γ4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$

Για δύο αυθαίρετους μιγαδικούς z, w ισχύει $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$
(αικλήση σχολικού που αποδεικνύεται πριν χρησιμοποιηθεί)

Οπότε για τους z_1, z_2, z_3 έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \\ |z_2 + z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 &= 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 \\ |z_1 + z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 &= 2|z_1|^2 + 2|z_3|^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &|z_1| = |z_2| = |z_3| = a \\ &\xrightarrow{\text{ερώτημα (Γ3)}} \begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 4a^2 \\ |z_2 + z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 &= 4a^2 \\ |z_1 + z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 &= 4a^2 \end{aligned} \end{aligned}$$

Οπότε $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |z_2 + z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 = |z_1 + z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2$ (1)

Από υπόθεση $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = |-z_3| = |z_3| = a \\ |z_2 + z_3| = |-z_1| = |z_1| = a \\ |z_1 + z_3| = |-z_2| = |z_2| = a \end{cases} \quad (2)$

Η (1) $\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_3|^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$

Οπότε αν K_1, K_2, K_3 οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο ισχύει $(K_1 K_2) = (K_2 K_3) = (K_1 K_3)$ δηλαδή το τρίγωνο $K_1 K_2 K_3$ είναι ισοπλευρό.

ΘΕΜΑ Δ

$$\underline{\Delta_1.} \quad w_1 = 5i^{2010} - 10i^3 = 5i^2 - 10(-i) = -5 + 10i \quad \text{οπότε} \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{-5+10i}{3+4i} = \frac{(-5+10i) \cdot (3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$$

$$= \frac{-15 + 20i + 30i + 40}{9+16} = \frac{25+50i}{25} = 1+2i$$

Από υπόθεση έχουμε: $z+1 = -\frac{1}{z} \iff z^2+z = -1 \iff z^2 = -1-z$ οπότε

$$z^3 = z^2 \cdot z = (-1-z) \cdot z = -z - z^2 = -z - (-1-z) = -z + 1 + z = 1$$

Δ2. Επειδή η $x_1 + 2i$ είναι ρίζα της $x^2 - (a-b)x + 6a+b = 0$ τότε η άλλη ρίζα είναι αναγκαστικά η $x_2 = 1-2i$. Όπως:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a-b \\ x_1 \cdot x_2 = 6a+b \end{cases} \iff \begin{cases} a-b=2 \\ 6a+b=5 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 7a=7 \iff \boxed{a=1 \text{ και } b=-1}$$

$$\underline{\Delta_3.} \quad \text{Έχουμε} \quad z^{1453} = z^{1452} \cdot z = (z^3)^{484} \cdot z \stackrel{z^3=1}{=} 1^{484} \cdot z = z$$

$$z^{1940} = z^{1941} \cdot \frac{1}{z} = (z^3)^{647} \cdot \frac{1}{z} \stackrel{z^3=1}{=} 1^{647} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z}$$

$$z^{2010} = (z^3)^{670} = 1^{670} = 1$$

$$\text{Οπότε} \quad A = z + \frac{1}{z} + 1 \stackrel{z+1=\frac{1}{z}}{\underset{\text{υπόθ.}}{=}} \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0.$$

Δ4. Για $a=1$ και $b=-1$ η εξίσωση γίνεται $z+3\bar{z} = (2+\sqrt{3}i)|z|$ ①

Από το ερώτημα (Δ1) επειδή $z^3=1$ άρα $|z^3|=1 \iff |z|^3=1 \iff |z|=1$

$$\text{οπότε αν } z=x+yi \text{ η } \textcircled{1} \iff x+yi+3(x-yi) = 2+\sqrt{3}i \iff$$

$$\iff 4x-2yi = 2+\sqrt{3}i \iff \begin{cases} 4x=2 \\ -2y=\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{οπότε } z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Δ. ΑΚΙΝΟΣΟΓΛΟΥ