

**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Περικλέους Σταύρου 31
34100 Χαλκίδα
Τ: 2221-300524 & 6937016375
F: 2221-300524
@: chalkida@diakrotima.gr
W: www.diakrotima.gr

Προς: Μαθητές Α, Β & Γ Λυκείου / Κάθε ενδιαφερόμενο

Αγαπητοί Φίλοι

Όπως σίγουρα γνωρίζετε, από τον Ιούνιο του 2010 ένα νέο «**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**» λειτουργεί και στη Χαλκίδα. Στο Φροντιστήριό μας, κάνοντας χρήση **πρωτοποριακών εκπαιδευτικών μέσων**, το «Σύστημα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ» γίνεται «Σύστημα Επιτυχίας»!

Κάποια από τα βασικά σημεία υπεροχής των Φροντιστηρίων **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** είναι τα εξής:

- **Ευρεία χρήση** διαδραστικού πίνακα
- **Εξειδικευμένοι καθηγητές** επιλεγμένοι με τις πλέον αυστηρές μεθόδους
- **5μελή τμήματα** αντί για τα συνήθη πολυμελή τμήματα των φροντιστηρίων
- **60λεπτο μάθημα** και όχι 45λεπτο
- **Βοηθήματα εκδόσεων ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** που προσφέρονται στους μαθητές μας

Εκτός όλων αυτών των πλεονεκτημάτων, οι μαθητές μας προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις ήδη από την Α Λυκείου, με τον τρόπο που διεξάγονται τα διαγωνίσματά μας. Η διαδικασία ξεκινά με την αποστολή του «Τετραδίου Ύλης» από τα Κεντρικά μία εβδομάδα πριν το καθορισμένο διαγώνισμα, ώστε να γνωρίζουν όλοι (διεύθυνση, καθηγητές και μαθητές) την εξεταστέα ύλη. Στη συνέχεια, την Παρασκευή το βράδυ πριν το διαγώνισμα αποστέλλονται από την Κεντρική Διοίκηση τα θέματα των διαγωνισμάτων του Σαββάτου, τα οποία φυσικά είναι άγνωστα και κοινά για όλα τα φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ.

Φανταστείτε λοιπόν, ότι οι μαθητές μας εξοικειώνονται ήδη από την Α τάξη του Λυκείου με την ιδέα των Πανελληνίων εξετάσεων αφού γράφουν σε όλη την Ελλάδα, κοινά και άγνωστα θέματα, σε κοινή ύλη, κοινή ημέρα και κοινή ώρα!

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Τετράδιο Ύλης του Διαγωνίσματος, τα θέματα του Διαγωνίσματος και οι απαντήσεις από τους εξειδικευμένους καθηγητές μας. Για οποιαδήποτε απορία έχετε μπορείτε να επικοινωνήσετε με το Φροντιστήριο στα τηλέφωνα και το e-mail που υπάρχουν πάνω δεξιά.

Τέλος, θα χαρούμε πολύ να σας δούμε από κοντά, προκειμένου να ενημερωθείτε εσείς και οι γονείς σας για τα προγράμματα σπουδών μας και να ωφεληθείτε από τις προσφορές μας ενόψει της νέας σχολικής χρονιάς.

Με φιλικούς χαιρετισμούς,

Απόστολος Κηρύκος
Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.
MSc Marketing & Communication A.U.E.B.
Διεύθυνση **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** Χαλκίδας

ΔΕΛΤΙΟ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

ΤΑΞΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ	ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ / ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/01/2011
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ / ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: ΖΑΓΚΛΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	
ΒΙΒΛΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ	§1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΚΑΙ §1.8 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ Α. ΟΡΙΑ – ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕΛ. 71 9,11, 22ii, 24, 30₁, 31iv, 33iii, 36, 41, 42_{2, 4} ΣΕΛ. 101 2ε, 3δ, 6στ, 13, 18, 20 ΣΕΛ. 111 2ιβ, ιδ, 3, 12, 13 ΣΕΛ. 130 6, 17, 18, 21α, 26, 29 ΠΑΡΑΤΗΡΗ: πρέπει να γίνει και συνοπτική επανάληψη στο κεφάλαιο των μιγαδικών.	
ΒΙΒΛΙΟ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	§1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΚΑΙ §1.8 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ Α. ΟΡΙΑ – ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕΛ. 145 ΟμΑ: 2i, 3i, 7ii,9, 10,11 ΟμΒ: 6ii, 8 ΣΕΛ. 156 ΟμΑ: 2vii, iv ΣΕΛ. 175 ΟμΑ: 4iii, 8ii, ΟμΒ: 2ii, iii ΣΕΛ. 181 ΟμΑ: 2i, ii, ΟμΒ:3 ΣΕΛ. 187 ΟμΑ: 2iv, 3iv, v ΟμΒ:1ii, 3, 4 ΣΕΛ. 198 ΟμΑ: 3iv, 4ii, 5v, 10 ΟμΒ: 3, 6, 8	

Για την άριστη προετοιμασία ενός διαγωνίσματος απαραίτητη είναι η γνώση όλων των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό και στο φροντιστηριακό βιβλίο ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ στα κεφάλαια που περιλαμβάνονται στην παραπάνω εξεταστέα ύλη. Κατ' ελάχιστον όμως απαραίτητη κρίνεται η γνώση των παραπάνω προτεινόμενων ασκήσεων.

Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
(απόφοιτοι-χειμερινά)

ΘΕΜΑ Α.

A₁. Εστω η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[α,β]$ και $f(α) \neq f(β)$ τότε ,για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α,β) : f(x_0) = n$ (Μονάδες 8)

A₂. Πότε λέμε οτι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της A . (Μονάδες 4)

A₃. Πότε λέμε οτι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. (Μονάδες 3)

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε

$f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\log_{\alpha} x) = +\infty$, αν $0 < \alpha < 1$

δ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$

ε) Μία συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β.

Εστω η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής με
 $(f(x))^2 + \eta\mu^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

B₁. Να δείξετε ότι: $-1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

B₂. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2011}}$ (Μονάδες 5)

B₃. Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (-2, 2) : f(x_0) = 3x_0$ (Μονάδες 5)

B₄. Να βρεθούν οι ρίζες της $f(x)=0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και να δειχθεί ότι η
 $f(x)=0$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Μονάδες 5)

B₅. Να βρεθεί ο τύπος της f στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, αν $f(0) = 1$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ.

Γ₁. Υπολογίστε το $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x \sin x - 2\eta\mu 5x}{x + 2\eta\mu x}$ (Μονάδες 2)

Γ₂. Υπολογίστε το $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{x+2} + 3) - (x+2)] + 1$ (Μονάδες 3)

Γ₃. Δίνεται το όριο $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\mu x^2 - x + 3} - 2x + 5)$

α) Εξετάστε πότε έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου (Μονάδες 3)

β) Υπολογίστε το I , όταν $\mu > 0$ (Μονάδες 4)

Γ₄. **α)** Αν οι μιγαδικοί z, w ικανοποιούν τις σχέσεις $|z + 2\beta - 2i| = \alpha$ και

$2(w + \bar{w}) + 2a(w - \bar{w})i = 4\kappa\beta$, αντίστοιχα με τα α, β των ερωτημάτων Γ_1, Γ_2 να

βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των z, w . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η εξίσωση $z=w$ να έχει μοναδική ρίζα

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ.

Αν για την συνάρτηση f ισχύει : $f(0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x^{2011} + 1} + 2011 \right)$

και $x^2 f(x) - \eta\mu(2011x^2) = x^3 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right), \forall x \neq 0$

Δ_1 . Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

(Μονάδες 12)

Δ_2 . Υπολογίστε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(Μονάδες 7)

Δ_3 . Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

Επιμέλεια Θεμάτων:

ΖΑΓΚΛΗΣ ΚΩΣΤΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία - απόδειξη σχολικού σελ. 194

A2. Θεωρία - ορισμός σχολικού σελ. 191

A3. Θεωρία - παρατήρηση σχολικού σελ. 189

A4. α. Σ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^2 + \eta \mu^2 x = 1 \Leftrightarrow (f(x))^2 = 1 - \eta \mu^2 x \Leftrightarrow (f(x))^2 = \sin^2 x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |f(x)|^2 = |\sin x|^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |\sin x|$ και επειδή $|\sin x| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
άρα $|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$.

B2. Από ερώτημα (B1) έχουμε ότι $-1 \leq f(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$. Καθώς $x \rightarrow +\infty$
τότε $x > 0$ οπότε $-\frac{1}{x^{2011}} \leq \frac{f(x)}{x^{2011}} \leq \frac{1}{x^{2011}}$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^{2011}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2011}} = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^{2011}} \right)} \right\} \begin{array}{l} \text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ} \\ \text{ΠΑΡΕΝΒΟΛΗΣ} \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2011}} = 0.$$

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3x, x \in [-2, 2]$.

Για την g έχουμε:

① Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων)

② $g(-2) = f(-2) + 6 > 0$ (αφού $f(-2) \geq -1 \Rightarrow f(-2) + 6 \geq 5 > 0$) $\left. \vphantom{g(-2) = f(-2) + 6} \right\} g(-2) \cdot g(2) < 0$
 $g(2) = f(2) - 6 < 0$ (αφού $f(2) \leq 1 \Rightarrow f(2) - 6 \leq -5 < 0$)

Οπότε από Θ. Βολζανο έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 2)$
τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0$.

B4. Έστω κ η ρίζα της $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\kappa) = 0$. Τότε από την δοθείσα
σχέση έχουμε $(f(\kappa))^2 + \eta \mu^2 \kappa = 1 \Leftrightarrow \eta \mu^2 \kappa = 1 \Leftrightarrow \eta \mu \kappa = \pm 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \kappa \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

Δηλαδή οι μοναδικές ρίζες της $f(x) = 0$ στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι οι $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

τότε θα υπάρχουν $\lambda, \mu \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, έστω $\lambda < \mu$ με $f(\lambda) > 0$ και $f(\mu) < 0$.

Εφαρμόζοντας Θ. Βολζανο για την f στο $[\lambda, \mu]$ έχουμε:

① Η f είναι συνεχής στο $[\lambda, \mu]$ $\left. \vphantom{f(\lambda) > 0} \right\} \Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\lambda, \mu)$
② $f(\lambda) \cdot f(\mu) < 0$

ώστε $f(\xi) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα
στο $(\lambda, \mu) \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (άτοπο). Οπότε f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
άρα $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

B5. Για την f έχουμε $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
και διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0) = 1 > 0$, $f(x) > 0$ για κάθε
 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\text{Για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), (f(x))^2 + \eta^2 x = 1 \Leftrightarrow (f(x))^2 = 1 - \eta^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(x))^2 = \sin^2 x \xrightarrow{f(x) > 0} f(x) = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x \text{ (αφού } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right))$$

Οπότε ο τύπος της f είναι $f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma_1. a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(16\sin x - \frac{2\eta\mu 5x}{x})}{x(1 + \frac{2\eta\mu x}{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16\sin x - \frac{2\eta\mu 5x}{x}}{1 + \frac{2\eta\mu x}{x}} \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x} \stackrel{u=5x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\eta\mu u}{u} =$$

$$= 5 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 5 \cdot 1 = 5. \text{ οπότε } (1) \Rightarrow a = \frac{16 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{1 + 2 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$\Gamma_2. b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{x+2} + 3) - (x+2)] + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{x+2} + 3) - \ln e^{x+2}] + 1 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{e^{x+2} + 3}{e^{x+2}} \right) + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{3}{e^{x+2}} \right) + 1 \right] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{3}{e^{x+2}} \right) \stackrel{u=1+3/e^{x+2}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0 \text{ οπότε } (2) \Rightarrow b = 0 + 1 = 1$$

$\Gamma_3. a)$ Η αναλίσθηση του ορίου I έχει νόημα εφόσον η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\mu x^2 - x + 3} - 2x + 5$ ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το $+\infty$. Πρέπει $\mu x^2 - x + 3 \geq 0$ (3)

i) Αν $\mu = 0$ τότε (3) $\Rightarrow -x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ δηλαδή η f ορίζεται στο $(-\infty, 3]$ και δεν έχει νόημα η αναλίσθηση του ορίου I .

ii) Αν $\mu \neq 0$ τότε για το τριώνυμο $\mu x^2 - x + 3$ έχουμε $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 12\mu$

• Αν $\mu < 0 \Rightarrow \Delta > 0$ και το τριώνυμο $\mu x^2 - x + 3$ έχει 2 άνισες ρίζες x_1, x_2 και (3) $\Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$, δηλαδή η f ορίζεται στο $[x_1, x_2]$ και δεν έχει νόημα η αναλίσθηση του ορίου I .

• Αν $\mu > 0$ και $\Delta > 0$ το τριώνυμο $\mu x^2 - x + 3$ έχει 2 άνισες ρίζες x_1, x_2 και (3) $\Rightarrow x \geq x_2$ ή $x \leq x_1$, δηλαδή η f ορίζεται στο $[-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ και έχει έννοια η αναλίσθηση του ορίου I .

Τέλος αν $\mu > 0$ και $\Delta \leq 0$ η (3) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η αναλίσθηση του ορίου I έχει νόημα.

Συνοψίζοντας το όριο I έχει νόημα αν $\boxed{\mu > 0}$

$$b) \text{ Αν } x > 0, f(x) = \sqrt{\mu x^2 - x + 3} - 2x + 5 = \sqrt{x^2 \left(\mu - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - 2x + 5 = \\ = x \sqrt{\mu - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x + 5 = x \cdot \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{5}{x} \right)$$

$$\text{Έχουμε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{5}{x} \right) = \sqrt{\mu} - 2$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$i) \text{ Αν } \sqrt{\mu} - 2 = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\mu} = 2 \xrightarrow{\mu > 0} \mu = 4, f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 5 =$$

$$= \frac{(\sqrt{4x^2 - x + 3})^2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x} + 5 = \frac{-x + 3}{\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x} + 5 = \frac{x(-1 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})} + 2x} + 5 =$$

$$= \frac{x(-1 + \frac{3}{x})}{x\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2x} + 5 = \frac{x(-1 + \frac{3}{x})}{x(\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2)} + 5 = \frac{-1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2} + 5$$

Οπότε $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2} + 5 \right] = \frac{-1 + 0}{\sqrt{4 - 0 + 0} + 2} + 5 = -\frac{1}{4} + 5 = \frac{19}{4}$

i.) Αν $\sqrt{\mu} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\mu} \neq 2 \Leftrightarrow \mu \neq 4$

• Αν $\mu > 4$ τότε $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (\sqrt{\mu} - 2) = +\infty$ (αφού $\sqrt{\mu} > 2$)

• Αν $0 < \mu < 4$ τότε $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (\sqrt{\mu} - 2) = -\infty$ (αφού $\sqrt{\mu} < 2$)

Οπότε $I = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \mu > 4 \\ -\infty & \text{αν } 0 < \mu < 4 \\ \frac{19}{4} & \text{αν } \mu = 4. \end{cases}$

Γ4. α) Για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z + 2i - 2| = a \Leftrightarrow |z + 2i - 2| = 2 \Leftrightarrow |z - (-2 + 2i)| = 2$. Άρα ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος κέντρου $K(-2, 2)$ και ακτίνας $\rho = 2$ με εξίσωση:

$$C: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Για τους μιγαδικούς w ισχύει $2(w + \bar{w}) + 2i(w - \bar{w}) = 4k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(w + \bar{w}) + 4i(w - \bar{w}) = 4k \xrightarrow{w = x + yi} 2 \cdot 2x - 4 \cdot 2y = 4k \Leftrightarrow 4x - 8y - 4k = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x - 2y - k = 0, k \in \mathbb{R}$. Άρα ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: x - 2y - k = 0$.

β) Για να έχει μοναδική ρίζα η εξίσωση $z = w$ αρκεί η ευθεία ε και ο κύκλος C του ερωτήματος (Γ4α) να έχουν μοναδικό κοινό σημείο, δηλαδή η ε να εφάπτεται του C . Τότε:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2 \cdot 2 - k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|k + 6|}{\sqrt{5}} = 2 \Leftrightarrow |k + 6| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k + 6 = 2\sqrt{5} \\ \text{ή} \\ k + 6 = -2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} k = -6 + 2\sqrt{5} \\ \text{ή} \\ k = -6 - 2\sqrt{5} \end{matrix}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Έχουμε $f(0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x^{2011} + 1} + 2011 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^{2011} + 1} + 2011 = 0$
 $= 0 \cdot 0 + 2011 = 2011$ (I)

Για $x \neq 0$, $x^2 \cdot f(x) - \eta\mu(2011x^2) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot f(x) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + \eta\mu(2011x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2} \xrightarrow{u = 2011x^2} 2011 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 2011 \cdot 1 = 2011$$

$$|x \cdot \sin(\frac{1}{x^2})| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \sin(\frac{1}{x^2}) \leq |x| \left\{ \begin{array}{l} \text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ} \\ \text{ΠΑΡΕΝΘΕΣΗΣ} \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin(\frac{1}{x^2}) \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 2011 = 2011$ (II)

Από (I), (II) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0.

Δ2. Από το ερώτημα (Δ1) έχουμε ότι για κάθε $x \neq 0$

$$f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x^2}) + \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(\frac{1}{x^2}) \stackrel{u = \frac{1}{x^2}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \sin u = \sin 0 = 0$$

$$\left| \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2} \right| = \frac{|\eta\mu(2011x^2)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ άρα } -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2} = 0$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) \cdot 0 + 0 = -\infty$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x^2}) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(2011x^2)}{x^2} = 0$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 0 + 0 = +\infty$

Δ3. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa < 0$

και $\lambda > 0$ ώστε $f(\kappa) < 0$ και $f(\lambda) > 0$.

Εφαρμόζοντας Θ.Βολτσανο για την f στο $[\kappa, \lambda]$ έχουμε:

① Η f είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$)

② $f(\kappa) \cdot f(\lambda) < 0$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ ώστε $f(x_0) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Δ. ΑΚΙΝΟΣΟΓΛΟΥ.