

**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Περικλέους Σταύρου 31
34100 Χαλκίδα
Τ: 2221-300524 & 6937016375
F: 2221-300524
@: chalkida@diakrotima.gr
W: www.diakrotima.gr

Προς: Μαθητές Α, Β & Γ Λυκείου / Κάθε ενδιαφερόμενο

Αγαπητοί Φίλοι

Όπως σίγουρα γνωρίζετε, από τον Ιούνιο του 2010 ένα νέο «**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**» λειτουργεί και στη Χαλκίδα. Στο Φροντιστήριό μας, κάνοντας χρήση **πρωτοποριακών εκπαιδευτικών μέσων**, το «Σύστημα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ» γίνεται «Σύστημα Επιτυχίας»!

Κάποια από τα βασικά σημεία υπεροχής των Φροντιστηρίων **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** είναι τα εξής:

- **Ευρεία χρήση** διαδραστικού πίνακα
- **Εξειδικευμένοι καθηγητές** επιλεγμένοι με τις πλέον αυστηρές μεθόδους
- **5μελή τμήματα** αντί για τα συνήθη πολυμελή τμήματα των φροντιστηρίων
- **60λεπτο μάθημα** και όχι 45λεπτο
- **Βοηθήματα εκδόσεων ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** που προσφέρονται στους μαθητές μας

Εκτός όλων αυτών των πλεονεκτημάτων, οι μαθητές μας προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις ήδη από την Α Λυκείου, με τον τρόπο που διεξάγονται τα διαγωνίσματά μας. Η διαδικασία ξεκινά με την αποστολή του «Τετραδίου Ύλης» από τα Κεντρικά μία εβδομάδα πριν το καθορισμένο διαγώνισμα, ώστε να γνωρίζουν όλοι (διεύθυνση, καθηγητές και μαθητές) την εξεταστέα ύλη. Στη συνέχεια, την Παρασκευή το βράδυ πριν το διαγώνισμα αποστέλλονται από την Κεντρική Διοίκηση τα θέματα των διαγωνισμάτων του Σαββάτου, τα οποία φυσικά είναι άγνωστα και κοινά για όλα τα φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ.

Φανταστείτε λοιπόν, ότι οι μαθητές μας εξοικειώνονται ήδη από την Α τάξη του Λυκείου με την ιδέα των Πανελληνίων εξετάσεων αφού γράφουν σε όλη την Ελλάδα, κοινά και άγνωστα θέματα, σε κοινή ύλη, κοινή ημέρα και κοινή ώρα!

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Τετράδιο Ύλης του Διαγωνίσματος, τα θέματα του Διαγωνίσματος και οι απαντήσεις από τους εξειδικευμένους καθηγητές μας. Για οποιαδήποτε απορία έχετε μπορείτε να επικοινωνήσετε με το Φροντιστήριο στα τηλέφωνα και το e-mail που υπάρχουν πάνω δεξιά.

Τέλος, θα χαρούμε πολύ να σας δούμε από κοντά, προκειμένου να ενημερωθείτε εσείς και οι γονείς σας για τα προγράμματα σπουδών μας και να ωφεληθείτε από τις προσφορές μας ενόψει της νέας σχολικής χρονιάς.

Με φιλικούς χαιρετισμούς,

Απόστολος Κηρύκος
Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.
MSc Marketing & Communication A.U.E.B.
Διεύθυνση **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** Χαλκίδας

ΔΕΛΤΙΟ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

ΤΑΞΗ: Β ΛΥΚΕΙΟΥ		ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 02/04/2011
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΟΦΟΣ		
ΒΙΒΛΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ	ΚΕΦΑΛΑΙΟ:2 – 3 – 4 (Συνοπτική επανάληψη τριγωνομετρίας) ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ:300 – 302 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 10 – 13		
ΒΙΒΛΙΟ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 132 : 7, β1 , β2 , β3, β5 141-142 : β1 – β2 – β3 – β4 – β5 146 – 147 : β2 – β5 – β6 – β7 – β8		

Για την άριστη προετοιμασία ενός διαγωνίσματος απαραίτητη είναι η γνώση όλων των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό και στο φροντιστηριακό βιβλίο ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ στα κεφάλαια που περιλαμβάνονται στην παραπάνω εξεταστέα ύλη. Κατ' ελάχιστον όμως απαραίτητη κρίνεται η γνώση των παραπάνω προτεινόμενων ασκήσεων.

Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!

Τάξη: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
 Κατεύθυνση: ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
 Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ
 Σύνολο σελίδες: 3

ΘΕΜΑ Α

A_1 . Να δοθεί ο ορισμός του λογάριθμου με βάση a του θ ($a \neq 1 / a, \theta > 0$)

Μονάδες 4

A_2 . Αν $a > 0$ με $a \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ και κ πραγματικό, να δείξετε ότι:

α. $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

Μονάδες 6

β. $\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$

Μονάδες 5

A_3 . Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $0 < \theta < 1$ τότε $\ln \theta > 0$

β. Η εκθετική συνάρτηση με βάση $a > 1$ έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα

Οχ'

γ. $\log_a \sqrt[k]{\theta} = \frac{1}{\kappa} \log_a \theta \mid \theta > 0$ και κ θετικός ακέραιος

δ. Αν $0 < x < e$ τότε $\ln x > \log 10$

ε. Αν $x_1, x_2 > 0$ τότε $\log_{\frac{2}{e}} x_1 > \log_{\frac{2}{e}} x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + (\ln \kappa - 2)x + \ln \lambda + 2 \mid \kappa, \lambda > 0$$

B_1 . Αν το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου ισούται με 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $(x - 2)$ ισούται με -6 , να βρείτε τα κ, λ .

Μονάδες 6

B_2 . Για $\kappa = e, \lambda = e^2$

1. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
2. Να βρεθούν τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x) = P(\ln x)$ με $x > 0$ βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 14

B_3 . Έστω αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = \ln 2, a_2 = \ln 8$. Να βρεθεί το πλήθος των n πρώτων διαδοχικών όρων με άθροισμα $20 \ln 32$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{e-a}{a-2e} \right)^x$ με a πραγματικό αριθμό.

Γ_1 . Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση :

1. Ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.
2. Είναι γνησίως αύξουσα.
3. Η C_f έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα Ox .

Μονάδες 12

Γ_2 . Αν $f(x) = (2e)^x$

1. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) - (1+2e)f(x) + 2e = 0$
2. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^{x+1}$ σε σημείο με τετμημένη $x_0 = \ln 2$.
3. Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(\ln 2)$ και $g(\ln 4)$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \ln \sqrt{e^x - 2}$$

και $g(x) = \sqrt{\ln(e^x - 2)}$

Δ_1 . Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 6

Δ_2 . Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g .

Μονάδες 7

Δ_3 . Ναδειχθεί ότι η αριθμοί $f(\ln 6), g(\ln 4), f(\ln(2 + e^2))$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 4

Δ_4 . Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: x + 2y - \ln 8 = 0$

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία.

Σοφός Γιώργος

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-ορισμός σχολικού σελ. 135

Α2. α. β. Θεωρία-απόδειξη σχολικού σελ. 136

Α3. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(1)=1 \Leftrightarrow 1^3-4 \cdot 1^2 + \ln k - 2 + \ln 1 + 2 = 1 \Leftrightarrow \ln k + \ln 1 = 4 \Leftrightarrow \ln(k \cdot 1) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \cdot 1 = e^4 \text{ (1)}$

$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-4 \cdot 2^2 + 2 \ln k - 4 + \ln 1 + 2 = -6 \Leftrightarrow 8-16+2 \ln k - 4 + \ln 1 + 2 = -6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \ln k + \ln 1 = 4 \Leftrightarrow \ln k^2 + \ln 1 = 4 \Leftrightarrow \ln(k^2 \cdot 1) = 4 \Leftrightarrow k^2 \cdot 1 = e^4 \text{ (2)}$

Διαιρώντας κατά μέλη της (1), (2) $\Rightarrow \frac{1}{k} = 1 \Leftrightarrow \boxed{k=1}$ και $\boxed{1=e^4}$

Β2. 1) Για $k=e$, $1=e^2$, $P(x)=x^3-4x^2-x+4$ οπότε

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=4 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1}$

2) Οι τιμές του x για τις οποίες η Gf βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - \ln x + 4 > 0 \text{ (I)}$

Θέτουμε $\ln x = y$ οπότε η (I) $\Rightarrow y^3 - 4y^2 - y + 4 > 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+1)(y-1) > 0$

y	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y-4	-	-	-	0	+
y+1	-	0	+	+	+
y-1	-	-	0	+	+
Πιν.	-	0	+	0	+

Από τον πίνακα προσημίων έχουμε ότι:

$-1 < y < 1$ ή $y > 4$ οπότε

$-1 < \ln x < 1$ ή $\ln x > 4$ δηλαδή

$\frac{1}{e} < x < e$ ή $x > e^4$

Άρα $x \in (\frac{1}{e}, e) \cup (e^4, +\infty)$

Β3. Έχουμε $w = a_2 - a_1 = \ln 8 - \ln 2 = \ln \frac{8}{2} = \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$.

$5v = 20 \ln 32 = 20 \cdot \ln 2^5 = 100 \ln 2$

$5v = \frac{v}{2} [2a_1 + (v-1)w] \Leftrightarrow 100 \ln 2 = \frac{v}{2} [2 \ln 2 + 2 \ln 2 (v-1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100 \ln 2 = \frac{v}{2} \cdot 2 \ln 2 (1+v-1) \Leftrightarrow v^2 = 100 \xrightarrow{v>0} \boxed{v=10}$

Άρα το πλήθος των όρων με άθροισμα $20 \ln 32$ είναι 10.

ΘΕΜΑ Γ

Π.1) Η f ορίζεται εφόσον $0 < \frac{e-a}{a-2e} \neq 1$

$\frac{e-a}{a-2e} \neq 1 \Leftrightarrow e-a \neq a-2e \Leftrightarrow a \neq \frac{3e}{2}$

$\frac{e-a}{a-2e} > 0 \Leftrightarrow (e-a)(a-2e) > 0 \Leftrightarrow (a-e)(a-2e) < 0 \Leftrightarrow e < a < 2e$.

Δηλαδή $a \in (e, \frac{3e}{2}) \cup (\frac{3e}{2}, 2e)$.

2) Η f είναι γνησίως αύξουσα αν $\frac{e-a}{a-2e} > 1 \Leftrightarrow \frac{e-a}{a-2e} - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e-a-a+2e}{a-2e} > 0 \Leftrightarrow \frac{3e-2a}{a-2e} > 0 \Leftrightarrow (3e-2a)(a-2e) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a-3e)(a-2e) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e < a < 2e$, δηλαδή $a \in (\frac{3}{2}e, 2e)$.

3) Η Cf έχει ασύνητο τον θετικό ημίαξονα Ox αν και μόνο αν η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $0 < \frac{e-a}{a-2e} < 1$

$$\frac{e-a}{a-2e} > 0 \stackrel{(I)}{\Leftrightarrow} e < a < 2e \text{ (I)}$$

$$\begin{aligned} \frac{e-a}{a-2e} < 1 &\Leftrightarrow \frac{e-a}{a-2e} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e-a-a+2e}{a-2e} < 0 \Leftrightarrow \frac{3e-2a}{a-2e} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3e-2a)(a-2e) < 0 \Leftrightarrow (2a-3e)(a-2e) > 0 \Leftrightarrow a < \frac{3e}{2} \text{ ή } a > 2e \text{ (II)} \\ \text{Από (I), (II)} &\Rightarrow e < a < \frac{3e}{2} \text{ δηλαδή } a \in (e, \frac{3e}{2}) \end{aligned}$$

2.1) $f(2x) - (1+2e)f(x) + 2e = 0 \Leftrightarrow (2e)^{2x} - (1+2e)(2e)^x + 2e = 0$

Θέτουμε $(2e)^x = \omega$, $\omega > 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - (1+2e)\omega + 2e = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1+2e)^2 - 8e = 1 + 4e + 4e^2 - 8e = 1 - 4e + 4e^2 = (2e-1)^2 > 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2e \pm (2e-1)}{2} = \begin{cases} 2e \\ 1 \end{cases}$$

• Για $\omega = 2e$, $(2e)^x = 2e \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

• Για $\omega = 1$, $(2e)^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

2) Η Cf τέμνει την Cg στο σημείο τετραγώνου $x_0 = \ln 2 \Leftrightarrow f(\ln 2) = g(\ln 2)$

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= (2e)^{\ln 2} = 2^{\ln 2} \cdot e^{\ln 2} = 2^{\ln 2} \cdot 2 = 2^{\ln 2 + 1} \\ g(\ln 2) &= 2^{\ln 2 + 1} \end{aligned} \Rightarrow f(\ln 2) = g(\ln 2)$$

3) $f(\ln 2) = 2^{\ln 2 + 1}$

$g(\ln 4) = 2^{\ln 4 + 1}$

Έχουμε ότι η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα άρα $\ln 2 < \ln 4 \Leftrightarrow \ln 2 + 1 < \ln 4 + 1 \Leftrightarrow 2^{\ln 2 + 1} < 2^{\ln 4 + 1}$ (αφού η 2^x είναι γνησίως αύξουσα)

Άρα $f(\ln 2) < g(\ln 4)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τη συνάρτηση f πρέπει $\sqrt{e^x - 2} > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

Ανταδρή το π.ο. της f είναι το $A = (\ln 2, +\infty)$.

Για τη συνάρτηση g πρέπει $\ln(e^x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 2 \geq 1 \\ e^x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \geq 3 \\ e^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \ln 2 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > \ln 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 2 \geq 1 \\ x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \geq 3 \\ x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \ln 3 \\ x > \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \ln 3$$

Ανταδρή το π.ο. της g είναι το $B = [\ln 3, +\infty)$

Δ2. Οι τετραγώνες των σημείων τομής των Cf, Cg είναι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln \sqrt{e^x - 2} = \sqrt{\ln(e^x - 2)} \text{ ① } \text{Θέτουμε } y = \ln(e^x - 2) \text{ η ① γίνεται}$$

$$\frac{1}{2}y = \sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{1}{4}y^2 = y \Leftrightarrow y^2 = 4y \Leftrightarrow y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y(y-4) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = 4$$

• Για $y = 0$, $\ln(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = \ln 1 \Leftrightarrow e^x - 2 = 1 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

• Για $y = 4$, $\ln(e^x - 2) = 4 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = \ln e^4 \Leftrightarrow e^x - 2 = e^4 \Leftrightarrow e^x = e^4 + 2$
άρα $x = \ln(e^4 + 2)$

Άρα τα σημεία τομής των Cf, Cg είναι τα $A(\ln 3, 0)$, $B(\ln(e^4 + 2), \ln 2)$.

Δ3. Αρκεί να δείσουμε ότι $(g(\ln 4))^2 = f(\ln 6) \cdot f(\ln(2+e^2))$

$$(g(\ln 4))^2 = (\sqrt{\ln(e^{\ln 4} - 2)})^2 = \ln(4-2) = \ln 2$$

$$f(\ln 6) \cdot f(\ln(2+e^2)) = \ln \sqrt{e^{\ln 6} - 2} \cdot \ln \sqrt{e^{\ln(2+e^2)} - 2} = \ln \sqrt{6-2} \cdot \ln \sqrt{2+e^2-2} = \\ = \ln \sqrt{4} \cdot \ln \sqrt{e^2} = \ln 2 \cdot \ln e = \ln 2$$

Ανταδici $f(\ln 6)$, $g(\ln 4)$, $f(\ln(2+e^2))$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.

Δ4. Έχουμε ε: $x+2y-\ln 8=0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 8$

Οι τεταγμένες των κοινών σημείων της Cf με την ε είναι λύσεις

της εξίσωσης $f(x) = y \Leftrightarrow \ln \sqrt{e^x - 2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 2)^{1/2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(e^x - 2) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = -x + \ln 8 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = \ln e^{-x} + \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = \ln(8 \cdot e^{-x}) \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = \ln\left(\frac{8}{e^x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2 = \frac{8}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x = 8 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 8 = 0 \text{ (I)}$$

Θέτουμε $K = e^x > 0$ η (I) γίνεται $K^2 - 2K - 8 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} K_1, K_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \\ \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 32 = 36 \end{array} \right.$

$$= \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \text{ (απορ)} \end{matrix}$$

Για $K=4$ έχουμε $e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$

Άρα η Cf τέμνει την ευθεία ε στο σημείο $\Gamma(\ln 4, f(\ln 4)) = (\ln 4, \frac{\ln 2}{2})$

Δ. ΑΚΙΝΟΣΟΓΛΟΥ