

**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Περικλέους Σταύρου 31
34100 Χαλκίδα
T: 2221-300524 & 6937016375
F: 2221-300524
@: chalkida@diakrotima.gr
W: www.diakrotima.gr

Προς: Μαθητές Α, Β & Γ Λυκείου / Κάθε ενδιαφερόμενο

Αγαπητοί Φίλοι

Όπως σίγουρα γνωρίζετε, από τον Ιούνιο του 2010 ένα νέο «**ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**» λειτουργεί και στη Χαλκίδα. Στο Φροντιστήριό μας, κάνοντας χρήση **πρωτοποριακών εκπαιδευτικών μέσων**, το «Σύστημα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ» γίνεται «Σύστημα Επιτυχίας»!

Κάποια από τα βασικά σημεία υπεροχής των Φροντιστηρίων **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** είναι τα εξής:

- **Ευρεία χρήση** διαδραστικού πίνακα
- **Εξειδικευμένοι καθηγητές** επιλεγμένοι με τις πλέον αυστηρές μεθόδους
- **5μελή τμήματα** αντί για τα συνήθη πολυμελή τμήματα των φροντιστηρίων
- **60λεπτο μάθημα** και όχι 45λεπτο
- **Βοηθήματα εκδόσεων ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** που προσφέρονται στους μαθητές μας

Εκτός όλων αυτών των πλεονεκτημάτων, οι μαθητές μας προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις ήδη από την Α Λυκείου, με τον τρόπο που διεξάγονται τα διαγωνίσματά μας. Η διαδικασία ξεκινά με την αποστολή του «Τετραδίου Ύλης» από τα Κεντρικά μία εβδομάδα πριν το καθορισμένο διαγώνισμα, ώστε να γνωρίζουν όλοι (διεύθυνση, καθηγητές και μαθητές) την εξεταστέα ύλη. Στη συνέχεια, την Παρασκευή το βράδυ πριν το διαγώνισμα αποστέλλονται από την Κεντρική Διοίκηση τα θέματα των διαγωνισμάτων του Σαββάτου, τα οποία φυσικά είναι άγνωστα και κοινά για όλα τα φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ.

Φανταστείτε λοιπόν, ότι οι μαθητές μας εξοικειώνονται ήδη από την Α τάξη του Λυκείου με την ιδέα των Πανελληνίων εξετάσεων αφού γράφουν σε όλη την Ελλάδα, κοινά και άγνωστα θέματα, σε κοινή ύλη, κοινή ημέρα και κοινή ώρα!

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Τετράδιο Ύλης του Διαγωνίσματος, τα θέματα του Διαγωνίσματος και οι απαντήσεις από τους εξειδικευμένους καθηγητές μας. Για οποιαδήποτε απορία έχετε μπορείτε να επικοινωνήσετε με το Φροντιστήριο στα τηλέφωνα και το e-mail που υπάρχουν πάνω δεξιά.

Τέλος, θα χαρούμε πολύ να σας δούμε από κοντά, προκειμένου να ενημερωθείτε εσείς και οι γονείς σας για τα προγράμματα σπουδών μας και να ωφεληθείτε από τις προσφορές μας ενόψει της νέας σχολικής χρονιάς.

Με φιλικούς χαιρετισμούς,

Απόστολος Κηρύκος
Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.
MSc Marketing & Communication A.U.E.B.
Διεύθυνση **ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ** Χαλκίδας

ΔΕΛΤΙΟ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

ΤΑΞΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20/11/2010
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: ΣΟΦΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	
ΒΙΒΛΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ	ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΕΛ. 109 - 110 ΑΣΚ. 6,8,11,12 ΣΕΛ. 127 - 128 ΑΣΚ. 5,10,17,18	
ΒΙΒΛΙΟ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 1.1 - 1.2 / 2.1 - 2.2 ΣΕΛ. 10-25 / ΣΕΛ. 61-73 / ΣΕΛΙΔΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΕΛ. 24-25 ΑΣΚ. 8-9-12-B1-B3 ΣΕΛ 64-65 ΑΣΚ. 4-B3-B4-B5 ΣΕΛ. 73 ΑΣΚ. B3-B4-B5	

Για την άριστη προετοιμασία ενός διαγωνίσματος απαραίτητη είναι η γνώση όλων των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό και στο φροντιστηριακό βιβλίο ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ στα κεφάλαια που περιλαμβάνονται στην παραπάνω εξεταστέα ύλη. Κατ' ελάχιστον όμως απαραίτητη κρίνεται η γνώση των παραπάνω προτεινόμενων ασκήσεων.

Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!

Τάξη: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κατεύθυνση: ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ

Σύνολο σελίδες: 3

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να δοθεί ο ορισμός της περιοδικής συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

A₂. Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$,

$g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων, αν $0 \leq x \leq 2\pi$

(Μονάδες 5)

A₃. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισοδυναμίες:

$$\eta\mu x = \eta\mu\psi \Leftrightarrow \dots\dots\dots \eta \dots\dots\dots$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\psi \Leftrightarrow \dots\dots\dots \eta \dots\dots\dots$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\psi \Leftrightarrow \dots\dots\dots \eta \dots\dots\dots$$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\psi \Leftrightarrow \dots\dots\dots \eta \dots\dots\dots$$

(Μονάδες 4)

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι περιττή

β) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\epsilon\phi x$ ορίζεται για $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

δ) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ στο $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι θετική.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ στο $[0,\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

A₅. Να γίνει η αντιστοίχιση μεταξύ της Στήλης Α και της Στήλης Β

Στήλη Α

Στήλη Β

1. $\eta\mu x=1$

$\alpha.x=\kappa\pi$

2. $\eta\mu x=-1$

$\beta.x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

3. $\sin x=1$

$\gamma.x=2\kappa\pi$

4. $\sin x=-1$

$\delta.x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

5. $\eta\mu x=0$

$\epsilon.x=2\kappa\pi+\pi$

6. $\sin x=0$

$\sigma\tau.x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

$\zeta.x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{2}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

B₁. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu x+\sqrt{2}=0$

(Μονάδες 12)

B₂. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu^2 x+\sin x-1=0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2 + 3\eta\mu\frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq 4\pi$

Γ₁. Να βρείτε την μέγιστη τιμή, ελάχιστη τιμή και την περίοδο της f

(Μονάδες 12)

Γ₂. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα.

(Μονάδες 7)

Γ₃. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2x) - f(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ.

Δ₁. Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu 2x + 1 = 0$ στο $[0, 2\pi]$

(Μονάδες 13)

Δ₂. Αν οι λύσεις της εξίσωσης του Β₁) τοποθετηθούν στον τριγωνομετρικό κύκλο δημιουργούν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραπλεύρου

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου

(Μονάδες 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΖΑΓΚΛΗΣ.Κ-ΛΩΛΗ.Ε-ΣΟΦΟΣ.Γ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία - ορισμός σχολικού σελ. 10

A2. Θεωρία - γραφήματα σχολικού σελ. 14.

A3. $\eta\mu x = \eta\mu y \Leftrightarrow x = 2k\pi + y$ ή $x = 2k\pi + \pi - y, k \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu y \Leftrightarrow x = 2k\pi + y$ ή $x = 2k\pi - y, k \in \mathbb{Z}$

$\epsilon\phi x = \epsilon\phi y \Leftrightarrow x = k\pi + y, k \in \mathbb{Z}$

$\sigma\phi x = \sigma\phi y \Leftrightarrow x = k\pi + y, k \in \mathbb{Z}$

A4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Λ

A5. 1. β, δ 2. δ 3. γ 4. ε 5. α 6. δ, στ

ΘΕΜΑ Β

B1. $2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

B2. $2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \quad (1)$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y, -1 \leq y \leq 1$ οπότε η (1) $\Rightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$ $\left. \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 \\ y_1, y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \end{array} \right\}$

$= \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

• Για $y = 1, \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• Για $y = -\frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ή $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $\eta\mu \frac{x}{2} = 1$ και η μέγιστη τιμή της ισούται με $f_{\max} = -2 + 3 = 1$, ενώ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν $\eta\mu \frac{x}{2} = -1$ και η ελάχιστη τιμή της ισούται με $f_{\min} = -2 - 3 = -5$.

Γ2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow -2 + 3\eta\mu \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow 3\eta\mu \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{x}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $0 \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4k\pi + \pi \leq 4\pi \Leftrightarrow -\pi \leq 4k\pi \leq 3\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \left. \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow k = 0$

Δηλαδή η f μεγιστοποιείται για $x = \pi$.

$f(x) = -5 \Leftrightarrow -2 + 3\eta\mu \frac{x}{2} = -5 \Leftrightarrow 3\eta\mu \frac{x}{2} = -3 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{x}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4k\pi - \pi$ ή $x = 4k\pi + 3\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ανάλογα η f ελαχιστοποιείται για $x = 3\pi$.

Γ3. $f(2x) - f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -2 + 3\eta\mu x + 2 - 3\eta\mu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 4k\pi - \frac{\pi}{3}$ $\left. \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$

$x = 2k\pi + \pi - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{7\pi}{9}$

ΘΕΜΑ Δ

$$\underline{\Delta_1.} \quad 2 \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = -\sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq k\pi + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq k\pi \leq \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{3} \left\{ \Rightarrow k=0, 1 \right.$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Άρα δύο λύσεις της εξίσωσης στο $[0, 2\pi]$ είναι οι $x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$$\text{Επίσης } 0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k\pi - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq k\pi \leq \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{3} \left\{ \Rightarrow k=1, 2 \right.$$

$$\text{Επομένως δύο λύσεις της εξίσωσης στο } [0, 2\pi] \text{ είναι οι } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$\Delta_2.$ α) Οι κορυφές του τετραγώνου ΑΒΓΔ που αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (Δ_1) είναι:

$$A\left(\sin \frac{\pi}{3}, \eta\mu \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Delta\left(\sin \frac{5\pi}{3}, \eta\mu \frac{5\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B\left(\sin \frac{2\pi}{3}, \eta\mu \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\sin \frac{4\pi}{3}, \eta\mu \frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

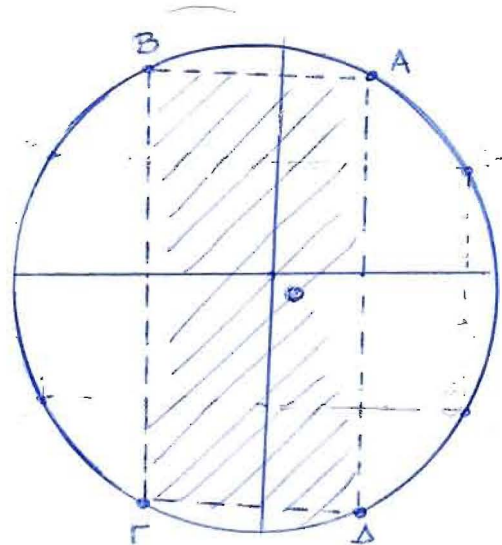
β) Λόγω συμμετρίας των Α, Β, Γ, Δ ως προς τους άξονες x'x, y'y και την αρχή των αξόνων Ο(0,0) το ΑΒΓΔ είναι ορθόγωνιο όμοιο

$$E = (AB) \cdot (BG) \quad (1)$$

$$(AB) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$(BG) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\text{Η } (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} E = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ τ.μ}$$



Δ. ΑΚΙΝΟΣΙΟΓΛΟΥ.