<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (Θεώρ. Fermat) σχολικό βιβλίο σελ. 260-261.

Α2. Θεωρία (Ορισμός) σχολικό βιβλίο σελ. 280.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \quad (1)$

Όμως $|\overline{z}+3i|=|\overline{\overline{z}+3i}|=|z-3i| \quad (2)$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \quad (3).$

Αν $z=x+yi$ η (3) γράφεται: $|x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

Οπότε $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\left(\overline{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)\in R .$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των z έχουμε ότι: $-1\le \mathrm{Re}(z)\le 1$,
οπότε $-2\le 2\,\mathrm{Re}(z)\le 2$. Άρα $-2\le w\le 2$.

Β4 Είναι: $|z-w|=\left|z-z+3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\overline{z}-3i|=|-\overline{z}|=|z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$(e^x)'\cdot f'(x)+e^x\cdot f''(x)-(e^x)'=(x\cdot f'(x))' \Leftrightarrow$

$(e^x\cdot f'(x)-e^x)'=(x\cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x\cdot f'(x)-e^x=x\cdot f'(x)+c_1,\ c_1\in R$

Για x = 0 προκύπτει:

$e^0\cdot f'(0)-e^0=0\cdot f'(0)+c_1$ και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι

$c_1=-1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x\cdot f'(x)-e^x=x\cdot f'(x)-1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x-1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\left[\ln(e^x-x)\right]' \Leftrightarrow f'(x)=\ln(e^x-x)+c_2.$$

Για x = 0 προκύπτει $c_2=0$.

Έτσι $f(x)=\ln(e^x-x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x)=e^x-x,\ x\in R$, είναι:

$h'(x)=e^x-1,\ x\in R$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$.

$h'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$.

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση x=0 την τιμή $h(0)=e^0-0=1$.

Δηλαδή $h(x)\geq 1>0$, για κάθε $x\in R$.

Γ2. Είναι $f'(x)=\left[\ln(e^x-x)\right]'=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού. $h'(x)=e^x-1$.

Συνεπώς $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$.

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x = 0 την τιμή $f(0)=\ln(e^0-0)=\ln 1=0$.

Γ3. Είναι: $f\,''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-x\right)'}{\left(e^x-x\right)^2}=$

$$=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x-x\right)\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}-xe^x-(e^{2x}-2e^x+1)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{\left(2-x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x)=(2-x)e^x-1,\ x\in R$.

Είναι

$\varphi'(x) = -e^x + (2-x)\cdot e^x = e^x\,(1-x)$
$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$
$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e - 1 > 0$.
Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty$, $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2-x)\cdot e^x-1\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2-x)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2-x\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{e^{-x}}=0$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi\left(x\right)=-1$.

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi\left(\left(-\infty,1\right]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi\left(x\right),\varphi\left(1\right)\right]=\left(-1,e-1\right].$$

$$\varphi\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right),\varphi\left(1\right)\right]=\left(-\infty,e-1\right].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0 \in \varphi\big((-\infty,1]\big)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty,1]$ ώστε $\varphi(x_1)=0$.

  Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο.

  Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x - x)^2 > 0$ για κάθε $x \in R$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty,1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0 \in \varphi\big([1,+\infty]\big)$ άρα υπάρχει $x_2 \in [1,+\infty)$, ώστε $\varphi(x_2)=0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο. Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1,+\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2.

Γ4. Θέτουμε $g(x)=\ln(e^x - x)-\sigma\upsilon\nu x = f(x)-\sigma\upsilon\nu x,\ x \in R$.

- Ύπαρξη : Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο R, άρα και στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

  Είναι $g(0)=f(0)-\sigma\upsilon\nu(0)=-1<0$

  $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

  Όμως $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $\dfrac{\pi}{2}>0 \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(0) \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0.$

  Έτσι $g(0)\cdot g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

  Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

  Έστω $x_1, x_2 \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

  $f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

$\sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2$ διότι $\sigma\upsilon\nu x \downarrow$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2) - \sigma\upsilon\nu x_1 < f(x_2) - \sigma\upsilon\nu x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+1)}\,\mathrm{dt}$$

Θέτουμε: x + t = u ⇔ t = u – x. Οπότε: dt = du.

Ακόμη για t = 0 έχουμε u = x και για t = – x έχουμε u = 0.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,\mathrm{du} = \int_x^0 e^{-2x}\frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} = -e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x}e^{-2x}\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$$

Άρα $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$ (1)

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$g(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{du}$ (2)

Επειδή οι συναρτήσεις $\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\dfrac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο R συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$ και $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(x)}\,\mathrm{du}$ είναι παραγωγίσιμες στο R, επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R.

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

οπότε $f'(x)g(x) = e^{2x}$ και $g'(x)f(x) = e^{2x}$

άρα

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0\overset{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$

και επειδή $f(0)=g(0)\overset{(1)\&(2)}{=}1$, θα είναι c = 1.

Άρα $f(x)=g(x)$.

Δ2. Επειδή είναι:

$f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}\Leftrightarrow$ (Ερώτημα Δ1)

$f'(x)f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία και έχουμε:

$f^2(x)=e^{2x}+c$

Όμως $f(0)=1$, οπότε $c=0$.

Άρα $f^2(x)=e^{2x}\Leftrightarrow\left[f(x)\right]^2=\left[e^x\right]^2\Leftrightarrow|f(x)|=e^x$

Και επειδή $f(x)>0$, προκύπτει ότι $f(x)=e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(De\,L'Hospital)$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{-1}{x}}=-\infty.$$

Δ4. Είναι $F'(x)=f(x^2)>0$. Άρα η $F\uparrow$ στο $[0,1]$.

Άρα για $0\le x\le1$ θα είναι $F(x)\le F(1)$ και επειδή $F(1)=0$, προκύπτει ότι $F(x)\le0$ $\forall x\in[0,1]$.

Επομένως $\forall x\in[0,1]$, θα είναι:

$$E=-\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1x'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1xF'(x)dx=$$

$$= -F(1) + \int_0^1 x\left(\int_1^x f(t^2)\right)' \mathrm{dx} = \int_0^1 x f(x^2)\mathrm{dx} =$$

$$\int_0^1 x e^{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 2x e^{x^2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)' \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$